Vibrations et Ondes

Partie 1 (Vibrations)

Chapitre V

Systèmes Linéaires à Deux Degrés de Liberté

Systèmes Libres à deux Degrés de Liberté

Équations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_1}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0. \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_2}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0. \end{cases}$$

Équations du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{q_1} + aq_1 - bq_2 = 0. \\ \ddot{q_2} + dq_2 - cq_1 = 0. \end{cases}$$

Recherche des Modes Propres à l'aide de la Représentation Complexe

$$\boxed{\begin{array}{c} q_1(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{q}_1(t) = \underline{A}_1 e^{j\omega t} \\ q_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{q}_2(t) = \underline{A}_2 e^{j\omega t} \end{array}} \Longrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + a)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 = 0. \\ -c\underline{A}_1 + (-\omega^2 + d)\underline{A}_2 = 0. \end{cases}$$

Solution **non triviale** si $\begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - (a+d)\,\omega^2 + (ad - bc) = 0.$

1^{er} mode: $\omega = \omega_1$.(La **fondamentale**). Si $\frac{A_{1(1)}}{A_{2(1)}} > 0$ la vibration est **en phase**.

$2^{ème}$ mode: $\omega = \omega_2$. (L'**harmonique**). Si $\frac{A_{1(2)}}{A_{2(2)}} < 0$ la vibration est **en opposition de phase**.

Systèmes Forcés à deux Degrés de Liberté(*une seule force*)

Équations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_1}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q_1}} + \mathcal{F}. \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_2}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q_2}}. \end{cases}$$

Équations du Mouvement

$$\begin{cases} \ddot{q_1} + 2\lambda_1\dot{q_1} + \omega_1^2 q_1 - \omega_3^2 q_2 = \mathcal{F}. \\ \ddot{q_2} + 2\lambda_2\dot{q_2} + \omega_2^2 q_2 - \omega_4^2 q_1 = 0. \end{cases}$$

Recherche des Amplitudes à l'aide de la Représentation Complexe($\mathcal{D} = 0$)

$$\boxed{\begin{array}{c} F_0\cos\Omega t \longrightarrow F_0 e^{j\Omega t} \\ q_1(t) = A_1\cos(\Omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{q}_1(t) = \underline{A}_1 e^{j\Omega t} \\ q_2(t) = A_2\cos(\Omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{q}_2(t) = \underline{A}_2 e^{j\Omega t} \end{array}} \Longrightarrow \begin{cases} (-\Omega^2 + \omega_1^2)\underline{A}_1 - \omega_3^2\underline{A}_2 = F_0. \\ (-\Omega^2 + \omega_2^2)\underline{A}_2 - \omega_4^2\underline{A}_1 = 0. \end{cases}$$

Les pulsations de résonance sont Ω_{R1} et Ω_{R2} pour lesquelles $A_1 = A_2 = \infty$.
La pulsation d'antirésonance est Ω_A pour laquelle $A_1 = 0$.

Calcul des Impédances à l'aide de la Représentation Complexe($\mathcal{D} \neq 0$)

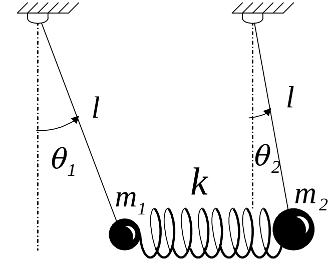
$$\boxed{\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}(t) \longrightarrow \underline{\mathcal{F}}(t)} \\ q_1(t) \longrightarrow \underline{q}_1(t) = \underline{A}_1 e^{j\Omega t} & q_2(t) \longrightarrow \underline{q}_2(t) = \underline{A}_2 e^{j\Omega t} \\ \dot{\underline{q}}_1 = j\Omega\underline{q}_1 \Longrightarrow \underline{q}_1 = \dfrac{\dot{\underline{q}}_1}{j\Omega} & \dot{\underline{q}}_2 = j\Omega\underline{q}_2 \Longrightarrow \underline{q}_2 = \dfrac{\dot{\underline{q}}_2}{j\Omega} \\ \ddot{\underline{q}}_1 = j\Omega\dot{\underline{q}}_1 & \ddot{\underline{q}}_2 = j\Omega\dot{\underline{q}}_2 \end{array}} \Longrightarrow \begin{cases} (\underline{\mathcal{Z}}_1 + \underline{\mathcal{Z}}_0)\dot{\underline{q}}_1 - \underline{\mathcal{Z}}_0\dot{\underline{q}}_2 = \underline{\mathcal{F}}. \\ (\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_0)\dot{\underline{q}}_2 - \underline{\mathcal{Z}}_0\dot{\underline{q}}_1 = 0. \end{cases}$$

L'impédance d'**entrée** $\underline{\mathcal{Z}}_E = \dfrac{\underline{\mathcal{F}}}{\dot{\underline{q}}_1} = \underline{\mathcal{Z}}_1 + \dfrac{\underline{\mathcal{Z}}_0\underline{\mathcal{Z}}_2}{\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_2}.$ L'impédance de **transfert** $\underline{\mathcal{Z}}_T = \dfrac{\underline{\mathcal{F}}}{\dot{\underline{q}}_2}.$

Analogie Électrique-Mécanique de Maxwell

$m \longleftrightarrow L. \quad \alpha \longleftrightarrow R. \quad k \longleftrightarrow 1/C.$

1) Oscillations Libres à deux Degrés de Libertés



1.1 Dans le système ci-contre: $\theta_1 \ll 1,\ \theta_2 \ll 1.$

1. Trouver l'énergie cinétique T puis l'énergie potentielle U**.**

2. Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.

3. Trouver à l'aide de la représentation complexe **les deux modes propres de vibration.**

4. Trouver la nature de la vibration pour chaque mode, sachant que $m_1 = \mathbf{1}$kg, $m_2 = \mathbf{2}$kg, $l = \mathbf{1}$m, $k = \mathbf{20}$N/m, g=**10**m.s^{-2}

Solution :

1. $T = T_{m_1}+T_{m_2}=\frac{1}{2}m_1(l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l\dot{\theta}_2)^2.$

$U = U_{m_1}+U_{m_2} + U_k \approx m_1g(l - l\cos\theta_1) + m_2g(l - l\cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(l\sin\theta_1 - l\sin\theta_2)^2$

$\approx \frac{1}{2}m_1gl\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\theta_2^2 + \frac{1}{2}kl^2(\theta_1 - \theta_2)^2.$

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}m_1gl\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl\theta_2^2 - \frac{1}{2}kl^2(\theta_1 - \theta_2)^2.$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1})\theta_1 - \frac{k}{m_1}\theta_2 = 0. \\ \ddot{\theta}_2 + (\frac{g}{l} + \frac{k}{m_2})\theta_2 - \frac{k}{m_2}\theta_1 = 0. \end{cases}} \quad (1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour trouver les modes propres :

$$\boxed{\begin{matrix} \theta_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{\theta}_1 = \underline{A}_1e^{j\omega t} \\ \theta_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{\theta}_2 = \underline{A}_2e^{j\omega t} \end{matrix}}$$

(1) devient

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 = 0 \\ -c\underline{A}_1 + (-\omega^2 + d)\underline{A}_2 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \text{où on a posé } \boxed{a=\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1},\ b=\frac{k}{m_1},\ c=\frac{k}{m_2},\ d=\frac{g}{l} + \frac{k}{m_2}.}$$

Pour que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ ne soient pas tous les deux nuls il faut que le déterminant caractéristique soit nul $\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \omega^4 - (a + d)\omega^2 + (ad - bc) = 0 \Longrightarrow$$

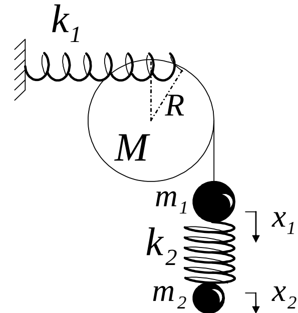
$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}}},\ \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}}}$$ A.N: $\omega_1 \approx \mathbf{3{,}2}$rad/s, $\omega_2 \approx \mathbf{6{,}3}$rad/s.

4. Premier mode $\omega = \omega_1$. D'après (2) : $\frac{\underline{A}_{1(1)}}{\underline{A}_{2(1)}} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} \approx \mathbf{1} > 0.$

La vibration dans le premier mode est donc **en phase**.

Deuxième mode $\omega = \omega_2$: D'après (2) : $\frac{\underline{A}_{1(2)}}{\underline{A}_{2(2)}} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} \approx -\mathbf{2} < 0.$

La vibration dans le deuxième mode est donc **en opposition de phase**.



1.2 Le fil autour du disque auquel est suspendue m_1 **est inextensible et non glissant.** ($\theta \ll 1.$)

1. Trouver l'énergie cinétique T **puis l'énergie potentielle** U**.**

2. Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.

3. Trouver à l'aide de la représentation complexe **les deux modes propres de vibration.**

4. Trouver la nature de la vibration pour chaque mode, sachant que $M = \mathbf{2}$kg, $m_1 = \mathbf{1}$kg, $m_2 = \mathbf{0{,}5}$kg, $l = \mathbf{1}$m, $k_1 = \mathbf{15}$N/m, $k_2 = \mathbf{10}$N/m.

Solution :

1. $T = T_{m_1}+T_{m_2}+T_M=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2$.

Puisque $R\theta = x_1$, on trouve $T=\frac{1}{2}(m_1+\frac{1}{2}M)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$.

$U = U_{m_1}+U_{m_2}+U_{k_1}+U_{k_2}$

$\approx -m_1gx_1-m_2gx_2+\frac{1}{2}k_1(x_0+R\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(x_0'+x_2-x_1)^2$

$\approx -m_1gx_1-m_2gx_2+\frac{1}{2}k_1(x_0+x_1)^2+\frac{1}{2}k_2(x_0'+x_2-x_1)^2$. (Car $R\theta = x_1$)

$\approx \frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2+C^{te}$. (La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires).

2. $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(m_1+\frac{1}{2}M)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2$.

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=0\end{cases}\Longrightarrow \boxed{\begin{cases}\ddot{x}_1+\frac{2(k_1+k_2)}{2m_1+M}x_1-\frac{2k_2}{2m_1+M}x_2=0.\\ \ddot{x}_2+\frac{k_2}{m_2}x_2-\frac{k_2}{m_2}x_1=0.\end{cases}}\quad(1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour trouver les modes propres :

$$\boxed{\begin{matrix}x_1=A_1\cos(\omega t+\phi_1)\longrightarrow \underline{x}_1=\underline{A}_1e^{j\omega t}\\ x_2=A_2\cos(\omega t+\phi_2)\longrightarrow \underline{x}_2=\underline{A}_2e^{j\omega t}\end{matrix}}$$

(1) devient

$$\begin{cases}(-\omega^2+a)\underline{A}_1-b\underline{A}_2=0\\ -c\underline{A}_2+(-\omega^2+c)\underline{A}_2=0\end{cases}\quad(2)\quad \text{où on a posé } \boxed{a=\frac{2(k_1+k_2)}{2m_1+M},\ b=\frac{2k_2}{2m_1+M},\ c=\frac{k_2}{m_2}.}$$

Pour que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ ne soient pas tous les deux nuls il faut que le déterminant caractéristique soit nul $\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix}-\omega^2+a & -b\\ -c & -\omega^2+c\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\omega^4-(a+c)\omega^2+(ac-bc)=0\Longrightarrow$$

$$\boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{(a+c)-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-bc)}}{2}}},\quad\boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-bc)}}{2}}}$$

A.N: $\omega_1\approx\mathbf{2{,}4}$rad/s, $\omega_2\approx\mathbf{5{,}2}$rad/s.

4. Premier mode $\omega=\omega_1$. D'après (2) : $\frac{\underline{A}_{1(1)}}{\underline{A}_{2(1)}}=\frac{-\omega_1^2+c}{c}\approx\mathbf{0{,}7}>0$.

La vibration dans le premier mode est donc **en phase**.

Deuxième mode $\omega=\omega_2$. D'après (2): $\frac{\underline{A}_{1(2)}}{\underline{A}_{2(2)}}=\frac{-\omega_2^2+c}{c}\approx-\mathbf{0{,}3}<0$.

La vibration dans le deuxième mode est donc **en opposition de phase**.

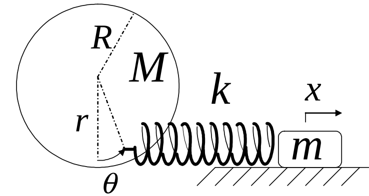
1.3 Dans le système ci-contre $\theta\ll1$.

1. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U.

2. Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.

3. Trouver à l'aide d la représentation complexe **les deux modes propres de vibration.**

4. Trouver la nature de la vibration pour chaque mode, **sachant que** $M=\mathbf{2}$kg, $m=\mathbf{0{,}5}$kg, $k=\mathbf{5}$N/m, $R=\mathbf{1}$m, $r=\mathbf{80}$cm.



Solution :

1. $T=T_M+T_m=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

$U=U_k\approx\frac{1}{2}k(r\theta-x)^2$.

2. $\mathcal{L}=\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(r\theta-x)^2$.

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0\end{cases}\Longrightarrow\boxed{\begin{cases}\ddot{\theta}+\frac{2kr^2}{MR^2}\theta-\frac{2kr}{MR^2}x=0\\ \ddot{x}+\frac{k}{m}x-\frac{kr}{m}\theta=0\end{cases}}\quad(1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour trouver les modes propres :

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \theta = \underline{A}_1 e^{j\omega t} \\ x = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}_2 e^{j\omega t} \end{array}}$$

(1) devient

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 = 0 \\ -cA_1 + (-\omega^2 + d)\underline{A}_2 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \text{où on a posé } \boxed{a = \frac{2kr^2}{MR^2},\ b = \frac{2kr}{MR^2},\ c = \frac{kr}{m},\ d = \frac{k}{m}.}$$

Pour que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ ne soient pas tous les deux nuls il faut que le déterminant caractéristique soit nul $\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \omega^4 - (a+d)\omega^2 + (ad - bc) = 0.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}}},\ \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}}}$$ A.N: $\omega_1 = \mathbf{0},\ \omega_2 \approx \mathbf{3{,}6}$rad/s.

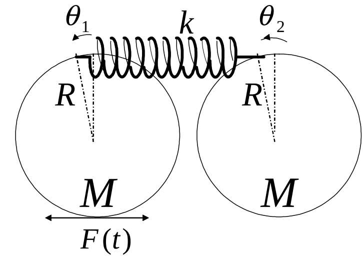
4. L'unique mode propre est $\omega = \omega_2$. D'après (2): $\frac{\underline{A}_{1(2)}}{\underline{A}_{2(2)}} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} \approx -\mathbf{0{,}4} < 0$.

La vibration dans le mode propre est donc **en opposition de phase**.

2) Oscillations Forcées à deux Degrés de Liberté ($\mathcal{D} = 0$)

2.1 Dans le système ci-contre $\theta_1 \ll 1,\ \theta_2 \ll 1$, et $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

1. **Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U.**
2. **Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.**
3. **A l'aide de la représentation complexe, trouver les amplitudes du mouvement.**
4. **Déduire les pulsations de résonance et d'antirésonance.**



Solution :

1. $T = T_M + T_M = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_2^2$.

$U = U_k \approx \frac{1}{2}k(R\sin\theta_1 - R\sin\theta_2)^2 \approx \frac{1}{2}kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2$.

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = FR \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{2k}{M}\theta_1 - \frac{2k}{M}\theta_2 = \frac{2F_0}{MR}\cos\Omega t \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{2k}{M}\theta_2 - \frac{2k}{M}\theta_1 = 0 \end{cases}} \quad (1)$$

3. En utilisant la représentation complexe :

$$\boxed{\begin{array}{c}(2F_0/MR)\cos\Omega t \longrightarrow (2F_0/MR)e^{j\Omega t}\\ \theta_1 = A_1\cos(\Omega t+\phi_1) \longrightarrow \underline{\theta}_1 = \underline{A}_1 e^{j\Omega t}\\ \theta_2 = A_2\cos(\Omega t+\phi_2) \longrightarrow \underline{\theta}_2 = \underline{A}_2 e^{j\Omega t}\end{array}}$$

(1) devient

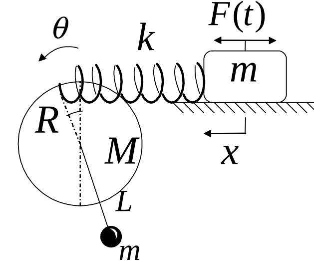
$$\begin{cases}(-\Omega^2+\omega_0^2)\underline{A}_1 - \omega_0^2\underline{A}_2 = \dfrac{2F_0}{MR}\\ (-\Omega^2+\omega_0^2)\underline{A}_2 - \omega_0^2\underline{A}_1 = 0\end{cases} \quad (2) \qquad \text{où on a posé } \boxed{\omega_0^2 = \frac{2k}{M}.}$$

La résolution du système d'équations (2) nous donne

$$\boxed{A_1 = \frac{2F_0}{MR}\frac{\left|\omega_0^2-\Omega^2\right|}{\left|(\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4\right|}.} \qquad \boxed{A_2 = \frac{2F_0}{MR}\frac{\omega_0^2}{\left|(\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4\right|}.}$$

4. $A_1 = A_2 = \infty$ lorsque $(\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4 = 0$. Soit $\Omega_{R1} = 0$ et $\Omega_{R2} = \sqrt{2}\omega_0$.
Donc il n'y a qu'une seule pulsation de résonance $\sqrt{2}\omega_0$.
$A_1 = 0$ pour $\Omega^2 = \omega_0^2$. La pulsation d'antirésonance du système est donc $\Omega_A = \omega_0$.

2.2 Dans le système ci-contre $\theta \ll 1$, et $F(t)= F_0\sin\Omega t$.
1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U.
2. Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.
3. A l'aide de la représentation complexe, trouver les amplitudes du mouvement.
4. Déduire les pulsations de résonance et d'antirésonance.



Solution :

1. $T = T_M + T_m + T_m = \frac{1}{4}MR^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 = \frac{1}{4}(MR^2+2mL^2)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2.$

$U = U_k + U_m \approx \frac{1}{2}k(R\sin\theta - x)^2 + mg(L - L\cos\theta) \approx \frac{1}{2}k(R\theta-x)^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2.$

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{4}(MR^2+2mL^2)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta-x)^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2.$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = F\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases}\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x - \dfrac{kR}{m}\theta = \dfrac{F_0}{m}\sin\Omega t\\ \ddot{\theta} + \dfrac{2(mgL+kR^2)}{MR^2+2mL^2}\theta - \dfrac{2kR}{MR^2+2mL^2}x = 0\end{cases}} \quad (1)$$

3. En utilisant la représentation complexe :

$$\boxed{\begin{array}{c}(F_0/m)\sin\Omega t \longrightarrow (F_0/m)e^{j\Omega t}\\ x = A_1\sin(\Omega t+\phi_1) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}_1 e^{j\Omega t}\\ \theta = A_2\sin(\Omega t+\phi_2) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}_2 e^{j\Omega t}\end{array}}$$

(1) devient

$$\begin{cases}(-\Omega^2+\omega_0^2)\underline{A}_1 - \omega_0^2 R\underline{A}_2 = \dfrac{F_0}{m}\\ (-\Omega^2+\omega_1^2)\underline{A}_2 - \dfrac{\omega_2^2}{R}\underline{A}_1 = 0\end{cases} \quad (2)$$

où on a posé $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{2(mgL+kR^2)}{MR^2+2mL^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{2kR^2}{MR^2+2mL^2}.}$

La résolution du système d'équations (2) nous donne

$$\boxed{A_1 = \frac{F_0}{m}\frac{\left|\omega_1^2-\Omega^2\right|}{\left|(\omega_0^2-\Omega^2)(\omega_1^2-\Omega^2)-\omega_0^2\omega_2^2\right|}.} \qquad \boxed{A_2 = \frac{F_0}{mR}\frac{\omega_2^2}{\left|(\omega_0^2-\Omega^2)(\omega_1^2-\Omega^2)-\omega_0^2\omega_2^2\right|}.}$$

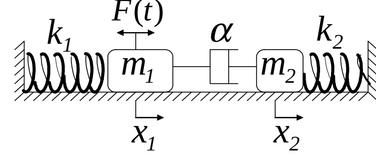
4. $A_1 = A_2 = \infty$ lorsque $(\omega_0^2 - \Omega^2)(\omega_1^2 - \Omega^2) - \omega_0^2\omega_2^2 = 0$.
Les deux pulsations de résonance sont donc

$$\boxed{\Omega_{R1} = \sqrt{\frac{\omega_0^2+\omega_1^2-\sqrt{(\omega_0^2+\omega_1^2)^2-4\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}}{2}}} \quad , \quad \boxed{\Omega_{R2} = \sqrt{\frac{\omega_0^2+\omega_1^2+\sqrt{(\omega_0^2+\omega_1^2)^2-4\omega_0^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}}{2}}}$$

$A_1 = 0$ pour $\Omega^2 = \omega_1^2$. Donc la pulsation d'antirésonance du système est $\Omega_A = \omega_1$.

3) Oscillations Forcées à deux Degrés de Liberté ($\mathcal{D} \neq 0$)

3.1 Dans le système ci-contre $F(t) = F_0 \cos\Omega t$.



1. **Trouver l'énergie cinétique** T**, l'énergie potentielle** U**, et la fonction de dissipation** $\mathcal{D}$.
2. **Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.**
3. **A l'aide de la représentation complexe trouver l'impédance d'entrée** $\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1}$.
4. **Déduire,** à l'aide de l'analogie de Maxwell, **le circuit électrique équivalent.**

Solution :

1. $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2$.
$U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$. $\qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$.

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}_1} + F \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}_2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 = F \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 = 0 \end{cases}} \quad (1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour écrire (1) en termes des vitesses complexes $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{F(t) \longrightarrow \underline{F}(t)} \\ x_1(t) \longrightarrow \underline{x}_1(t) = \underline{A}_1e^{j\Omega t} & x_2(t) \longrightarrow \underline{x}_2(t) = \underline{A}_2e^{j\Omega t} \\ \dot{\underline{x}}_1 = j\Omega\underline{x}_1 \Longrightarrow \underline{x}_1 = \frac{\underline{v}_1}{j\Omega} & \dot{\underline{x}}_2 = j\Omega\underline{x}_2 \Longrightarrow \underline{x}_2 = \frac{\underline{v}_2}{j\Omega} \\ \ddot{\underline{x}}_1 = j\Omega\underline{v}_1 & \ddot{\underline{x}}_2 = j\Omega\underline{v}_2 \end{array}}$$

(1) devient

$$\begin{cases} m_1\ddot{\underline{x}}_1 + k_1\underline{x} + \alpha\dot{\underline{x}}_1 - \alpha\dot{\underline{x}}_2 = \underline{F} \\ m_2\ddot{\underline{x}}_2 + k_2\underline{x}_2 + \alpha\dot{\underline{x}}_2 - \alpha\dot{\underline{x}}_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (jm_1\Omega + \frac{k_1}{j\Omega} + j\alpha\Omega)\underline{v}_1 - j\alpha\Omega\underline{v}_2 = \underline{F} \\ (jm_2\Omega + \frac{k_2}{j\Omega} + j\alpha\Omega)\underline{v}_2 - j\alpha\Omega\underline{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Posons $\boxed{jm_1\Omega + \frac{k_1}{j\Omega} = \underline{Z}_1, \quad jm_2\Omega + \frac{k_2}{j\Omega} = \underline{Z}_2, \quad j\alpha\Omega = \underline{Z}_0.}$

Le système d'équations (2) s'écrit:

$$\begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0)\underline{v}_1 - \underline{Z}_0\underline{v}_2 = \underline{F} \\ (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0)\underline{v}_2 - \underline{Z}_0\underline{v}_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{F} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 - \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0})\underline{v}_1 = (\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_0\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0})\underline{v}_1$$

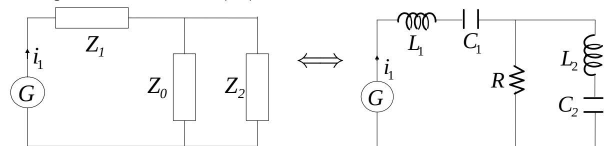
L'impédance d'entrée est donc $\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = \boxed{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_0 // \underline{Z}_2).}$ (3)

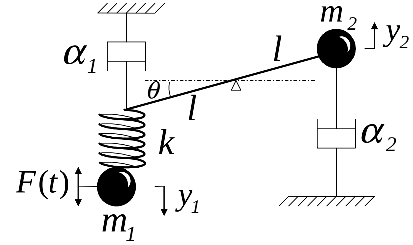
4. Grâce à l'analogie de Maxwell,

$$\boxed{\begin{array}{c} m_1 \longleftrightarrow L_1 \quad , \quad m_2 \longleftrightarrow L_2 \\ k_1 \longleftrightarrow 1/C_1 \quad , \quad k_2 \longleftrightarrow 1/C_2 \\ \alpha \longleftrightarrow R \end{array}}$$

on conclut que
$\underline{Z}_1 \Leftrightarrow$ bobine(L_1)+condensateur(C_1).
$\underline{Z}_2 \Leftrightarrow$ bobine(L_2)+condensateur(C_2).
$\underline{Z}_0 \Leftrightarrow$ résistance(R).

D'après (3), on a le circuit électrique équivalent:





3.2 Dans le système ci-contre $F(t)$=$F_0 \sin \Omega t$.

1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. $(\theta \ll 1.)$

2. Trouver le Lagrangien puis les équations du mouvement.

3. A l'aide de la représentation complexe trouver l'impédance d'entrée $\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1}$.

4. Déduire, à l'aide de l'analogie de Maxwell, **le circuit électrique équivalent.**

Solution :

1. $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$.

$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k \approx -m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (y_0 + y_1 - l\theta)^2 + C^{te}$.

$= \frac{1}{2} k (y_1 - l\theta)^2 + C^{te}$. (La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires)

$= \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2 + C^{te}$. (Car $l \sin\theta = y_2 \approx l\theta$.) $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha_1 (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\dot{y}_2^2$.

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}_1} + F \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}_2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k y_1 - k y_2 = F \\ m_2 \ddot{y}_2 + k y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{y}_2 - k y_1 = 0 \end{cases}} \quad (1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour écrire (1) en termes des vitesses complexes $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$:

$$\boxed{\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{F(t) \longrightarrow \underline{F}(t)} \\ y_1(t) \longrightarrow \underline{y}_1(t) = \underline{A}_1 e^{j\Omega t} & y_2(t) \longrightarrow \underline{y}_2(t) = \underline{A}_2 e^{j\Omega t} \\ \dot{\underline{y}}_1 = j\Omega \underline{y}_1 \Longrightarrow \underline{y}_1 = \frac{\underline{v}_1}{j\Omega} & \dot{\underline{y}}_2 = j\Omega \underline{y}_2 \Longrightarrow \underline{y}_2 = \frac{\underline{v}_2}{j\Omega} \\ \ddot{\underline{y}}_1 = j\Omega \underline{v}_1 & \ddot{\underline{y}}_2 = j\Omega \underline{v}_2 \end{array}}$$

(1) devient

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{y}}_1 + k\underline{y}_1 - k\underline{y}_2 = \underline{F} \\ m_2 \ddot{\underline{y}}_2 + k\underline{y}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{\underline{y}}_2 - k\underline{y}_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (jm_1\Omega + \frac{k}{j\Omega})\underline{v}_1 - \frac{k}{j\Omega}\underline{v}_2 = \underline{F} \\ (jm_2\Omega + \frac{k}{j\Omega} + \alpha_1 + \alpha_2)\underline{v}_2 - \frac{k}{j\Omega}\underline{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Posons $\boxed{jm_1\Omega = \underline{Z}_1, \quad jm_2\Omega + \alpha_1 + \alpha_2 = \underline{Z}_2, \quad \frac{k}{j\Omega} = \underline{Z}_0.}$

Le système d'équations (2) s'écrit:

$$\begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0)\underline{v}_1 - \underline{Z}_0 \underline{v}_2 = \underline{F} \\ (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0)\underline{v}_2 - \underline{Z}_0 \underline{v}_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{F} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 - \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0})\underline{v}_1 = (\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0})\underline{v}_1$$

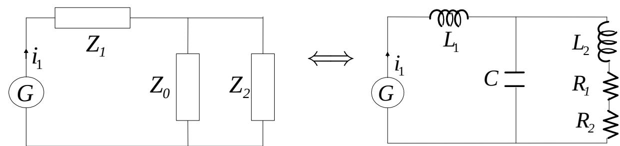
L'impédance d'entrée est donc $\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2} = \boxed{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_0 // \underline{Z}_2).}$ (3)

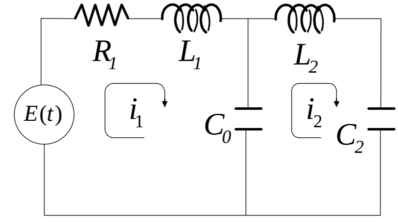
4. Grâce à l'analogie de Maxwell,

$$\boxed{\begin{array}{c} m_1 \longleftrightarrow L_1 \quad , \quad m_2 \longleftrightarrow L_2 \\ \alpha_1 \longleftrightarrow R_1 \quad , \quad \alpha_2 \longleftrightarrow R_2 \\ k \longleftrightarrow 1/C \end{array}}$$

on conclut que $\underline{Z}_1 \Leftrightarrow$ bobine(L_1).
$\underline{Z}_2 \Leftrightarrow$ bobine(L_2)+résistance(R_1)+résistance(R_2)
$\underline{Z}_0 \Leftrightarrow$ résistance(C)

D'après (3) on a le circuit électrique équivalent :





3.3 Dans le circuit ci-contre $E(t) = E_0 \cos \Omega t$.

1. **A l'aide de la loi des mailles, trouver les deux équations du mouvement des courants i_1 et i_2.**
2. **Trouver à l'aide de la représentation complexe l'impédance d'entrée $\underline{Z}_E = \frac{\underline{E}}{\underline{i}_1}$.**
3. **Déduire,** à l'aide de l'analogie de Maxwell, **le système mécanique équivalent.**

Solution :

1. La loi des mailles appliquée aux deux mailles du circuit nous donne

$$\begin{cases} \text{Maille (1)} : E = U_{R_1} + U_{L_1} + U_{C_0}. \\ \text{Maille (2)} : 0 = U_{L_2} + U_{C_2} + U_{C_0}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\int (i_1 - i_2)\mathrm{d}t}{C_0} = E \\ L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\int i_2 \mathrm{d}t}{C_2} + \dfrac{\int (i_2 - i_1)\mathrm{d}t}{C_0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Ces deux équations sont dites **intégro-différentielles** car elles contiennent des dérivées et des intégrales.*

2. Utilisons la représentation complexe pour écrire (1) en termes des courants complexes $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$.

$$E(t) \longrightarrow \underline{E}(t)$$

$$i_1(t) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = \underline{I}_1 e^{j\Omega t} \qquad i_2(t) \longrightarrow \underline{i}_2(t) = \underline{I}_2 e^{j\Omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t} = j\Omega \underline{i}_1 \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{d}t} = j\Omega \underline{i}_2$$

$$\int \underline{i}_1 \mathrm{d}t = \frac{\underline{i}_1}{j\Omega} \qquad \int \underline{i}_2 dt = \frac{\underline{i}_2}{j\Omega}$$

(1) devient

$$\begin{cases} (R_1 + j\Omega L_1 + \dfrac{1}{j\Omega C_0})\underline{i}_1 - \dfrac{1}{j\Omega C_0}\underline{i}_2 = \underline{E}. \\ (j\Omega L_2 + \dfrac{1}{j\Omega C_2} + \dfrac{1}{j\Omega C_0})\underline{i}_2 - \dfrac{1}{j\Omega C_0}\underline{i}_1 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0)\underline{i}_1 - \underline{Z}_0 \underline{i}_2 = \underline{E}. \\ (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0)\underline{i}_2 - \underline{Z}_0 \underline{i}_1 = 0. \end{cases}$$

où on a posé $\boxed{\underline{Z}_1 = R_1 + j\Omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = j\Omega L_2 + \frac{1}{j\Omega C_2}, \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{j\Omega C_0}.}$

L'impédance d'entrée est donc $\underline{Z}_E = \dfrac{\underline{E}}{\underline{i}_1} = \underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = \boxed{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_0 // \underline{Z}_2).}$ (2)

3. Grâce à l'analogie de Maxwell

$L_1 \longleftrightarrow m_1$, $L_2 \longleftrightarrow m_2$		$\underline{Z}_1 \Leftrightarrow$ amortisseur(α_1)+masse(m_1).
$1/C_0 \longleftrightarrow k_0$, $1/C_2 \longleftrightarrow k_2$	on conclut que	$\underline{Z}_2 \Leftrightarrow$ masse(m_2)+ressort(k_2).
$R_1 \longleftrightarrow \alpha_1$		$\underline{Z}_0 \Leftrightarrow$ ressort(k_0).

D'après (2), on a le système mécanique équivalent suivant:

